

# Sabiranje i oduzimanje vektora

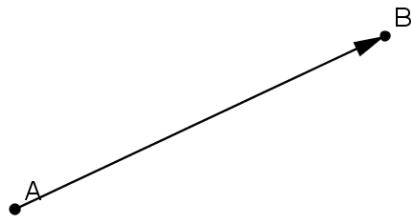
Pojam vektora:

Najjednostavnija definicija vektora je sledeća:

*Vektor je usmerena duž.*

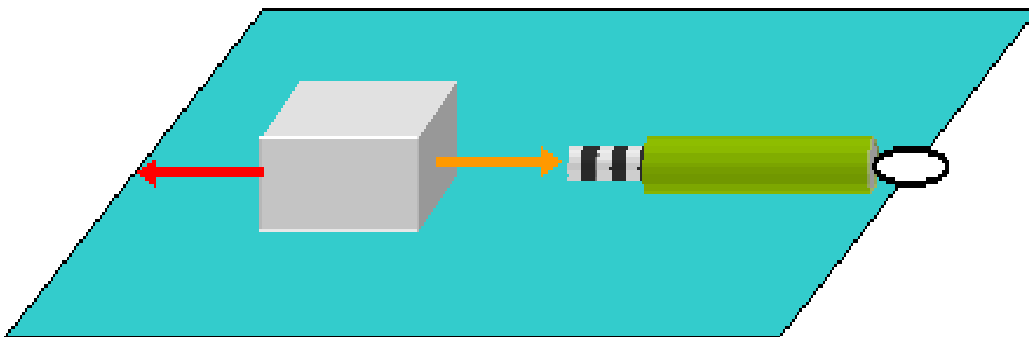
Usmerena duž je duž kod koje razlikujemo početnu i krajnju tačku.

Primer:



Vektor sa slike označavamo sa  $\overrightarrow{AB}$ , gde je tačka  $A$  početna, a tačka  $B$  krajnja tačka vektora  $\overrightarrow{AB}$ .

Vektori se često primenjuju u fizici, jer se pomoću njih opisuju sile:



## Osobine vektora:

Svaki vektor je jednoznačno određen sa svoje tri osobine:

- pravcem
- smerom
- intenzitetom

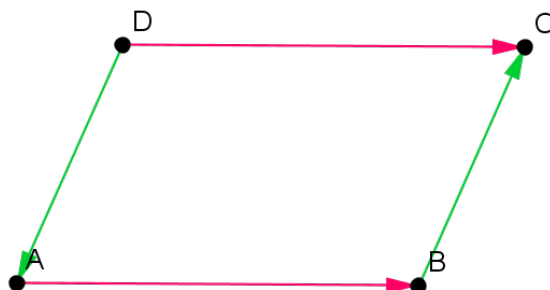
Dva vektora su jednaka ako imaju isti pravac, isti smer i imaju jednake intenzitete.

Dva vektora imaju isti pravac ako pripadaju međusobno paralelnim pravama. Tada kažemo da su ta dva vektora **kolinearna**.

Intenzitet vektora  $\overrightarrow{AB}$  je rastojanje između tačaka  $A$  i  $B$ , tj. dužina duži  $AB$ , i označavamo sa  $|AB|$ .

Smer vektora određuje početna i krajnja tačka datog vektora. Za svaki vektor postoji suprotan vektor koji ima isti pravac i intenzitet, ali suprotan smer od datog vektora.

## Primer:



Kod paralelograma  $ABCD$  važe sledeće:

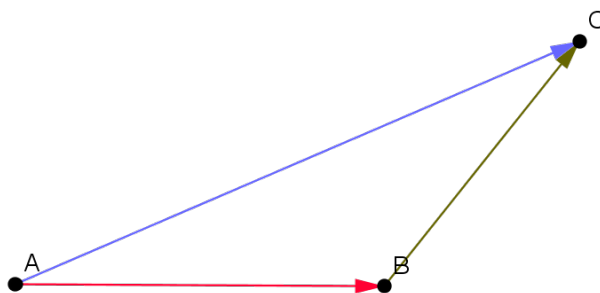
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ , jer  $|AB| = |DC|$ ,  $p(A, B) \parallel p(D, C)$  i  $\overrightarrow{AB}$  ima isti smer kao  $\overrightarrow{DC}$
- $\overrightarrow{DA}$  je suprotan vektoru  $\overrightarrow{BC}$ , jer  $|BC| = |AD|$ ,  $p(B, C) \parallel p(D, A)$  ali  $\overrightarrow{AB}$  ima suprotan smer od  $\overrightarrow{DC}$

## SABIRANJE VEKTORA

Zbir dva vektora je vektor čija se početna tačka poklapa sa početnom tačkom prvog vektora, a krajnja tačka se poklapa sa krajnjom tačkom drugog vektora, tj.

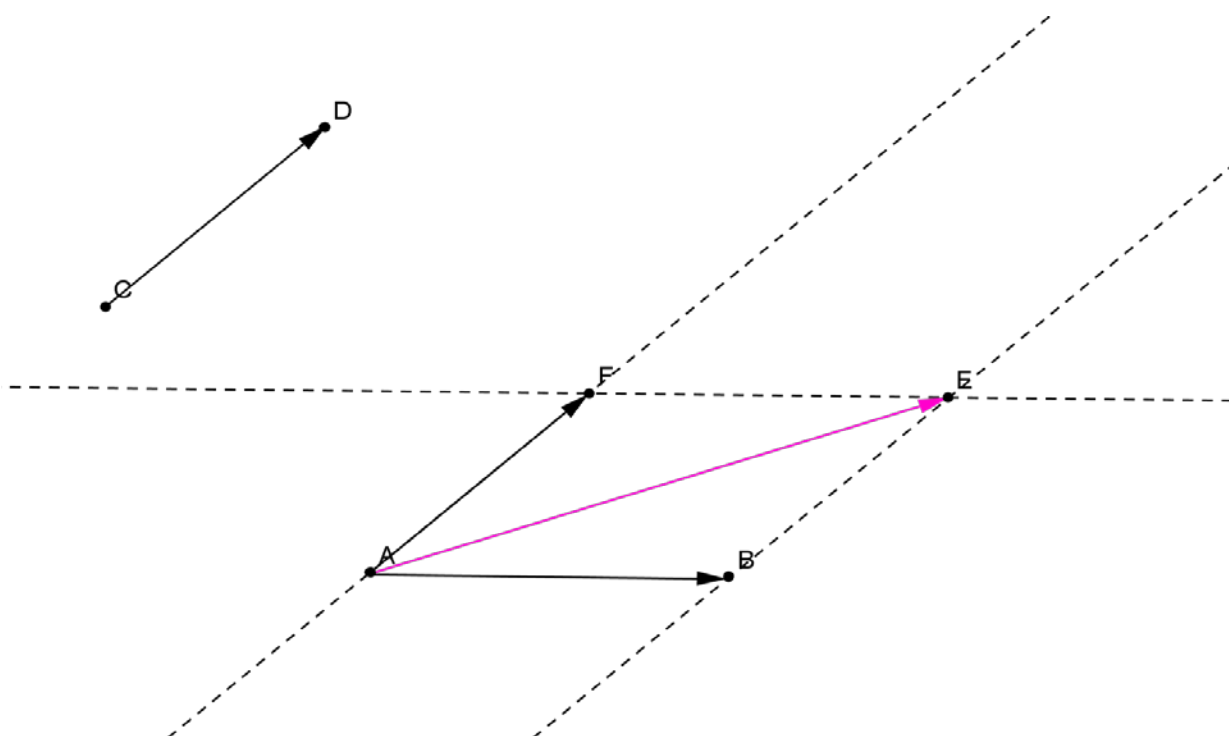
$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$

Grafički izgleda na sledeći način:

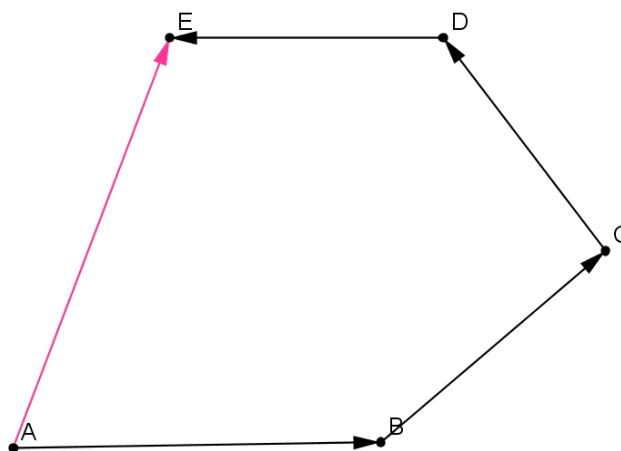


Za sabiranje dva vektora važi **pravilo paralelograma**:

Neka su  $\vec{AB}$  i  $\vec{CD}$  dati vektori. Vektor  $\vec{CD}$  se može paralelno pomeriti u položaj da se početak vektora poklopi sa početkom vektora  $\vec{AB}$ . Zbir vektora  $\vec{AB}$  i  $\vec{CD}$  će biti orijentisana dijagonala  $\vec{AE}$  paralelograma  $ABEF$ , gde je  $\vec{BE} = \vec{AF} = \vec{CD}$ , i  $\vec{FE} = \vec{AB}$ .



Može se sabrati i više vektora, na sledeći način: spajamo vektore tako da početak svakog sledećeg bude kraj prethodnog vektora. Vektor koji spaja početnu tačku prvog vektora sa krajnjom tačkom poslednjeg vektora je zbir datih vektora.



## Osobine sabiranja vektora

Neka su dati vektori  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{CD}$  i  $\overrightarrow{EF}$ . Uvedemo sledeće oznake:

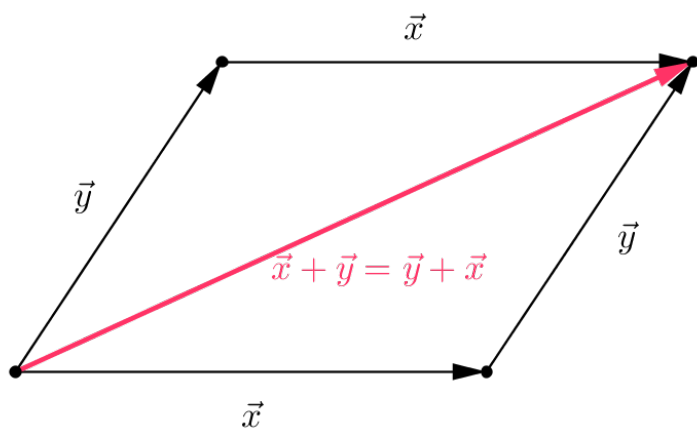
$$\vec{x} = \overrightarrow{AB}$$

$$\vec{y} = \overrightarrow{CD}$$

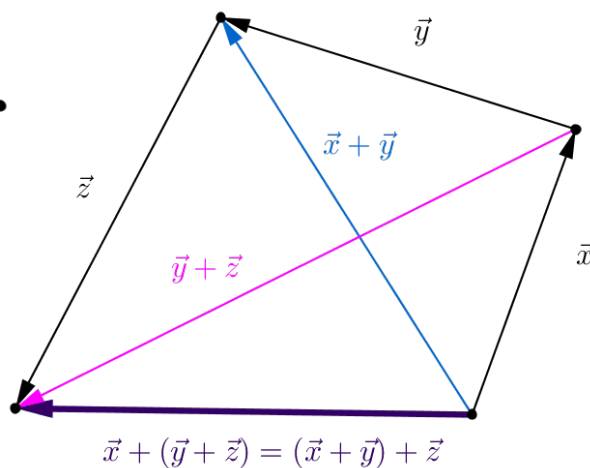
$$\vec{z} = \overrightarrow{EF}$$

Tada važe sledeće:

- 1)  $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$  (komutativnost)
- 2)  $\vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z}$  (asocijativnost)



Komutativnost



Asocijativnost

Postoji i **neutralni element** sabiranja vektora, naziva se **nula vektor**, i označava se sa  $\vec{0}$ , i važi:  $\vec{0} = \overrightarrow{AA}$ , gde je  $A$  proizvoljna tačka. Dakle, početak i kraj nula vektora se poklapaju.

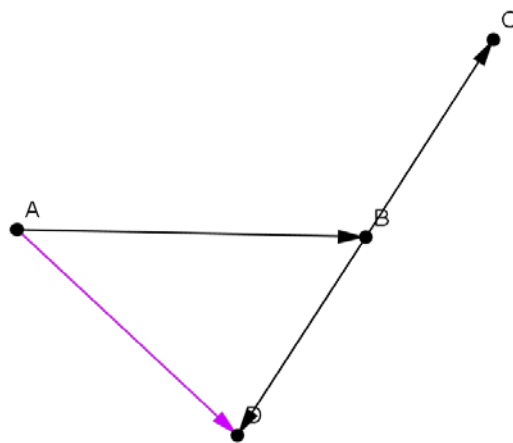
$$\vec{x} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{x} = \vec{x}$$

## ODUZIMANJE VEKTORA

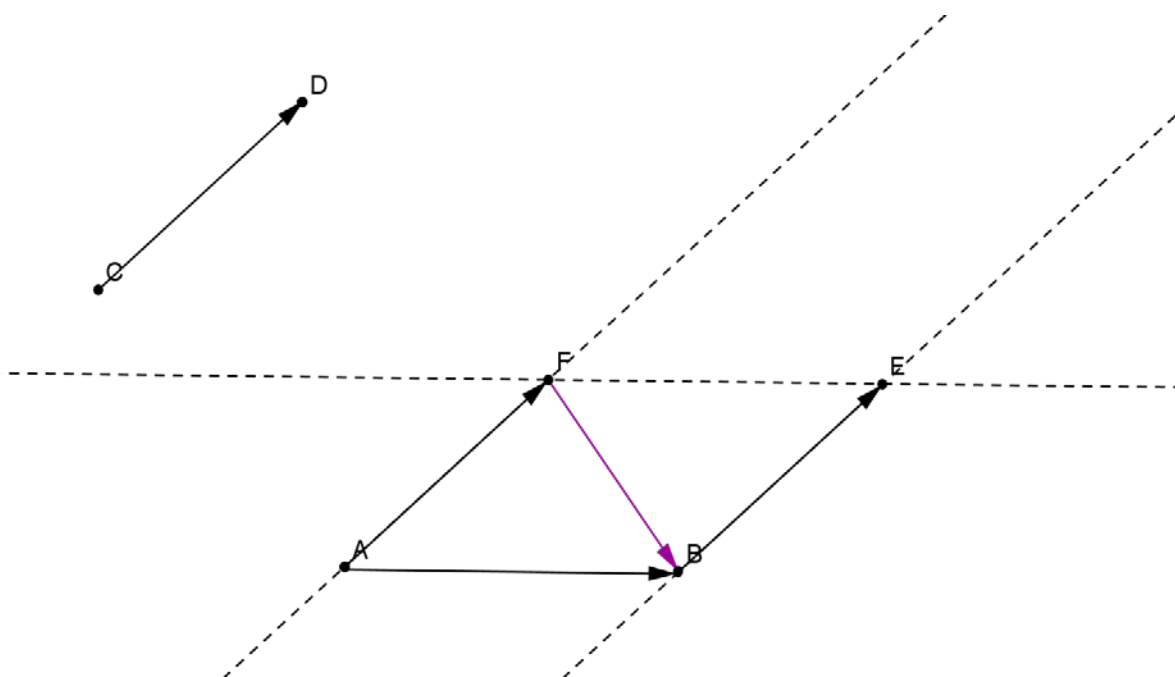
Oduzimanje vektora možemo definisati pomoću sabiranja vektora:

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{BC})$$

gde je  $-\overrightarrow{BC}$  suprotan vektor vektoru  $\overrightarrow{BC}$ .



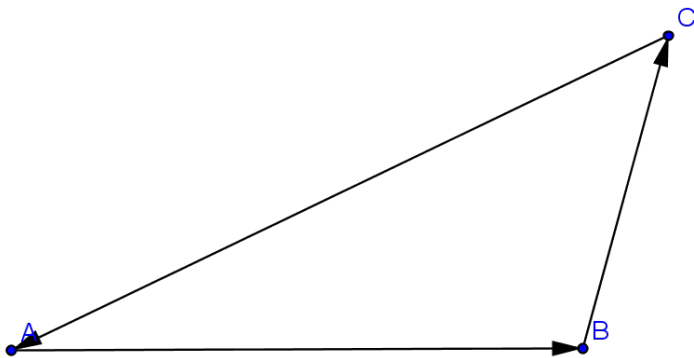
I kod oduzimanja vektora možemo koristiti pravilo paralelograma, razlika dva vektora  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$  će biti orijentisana dijagonala  $\overrightarrow{FB}$  paralelograma  $ABEF$ , gde je  $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{CD}$ , i  $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{AB}$ .



## Zadaci:

1. Neka je dat trougao  $ABC$ . Pokazati da je  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$ .

### Rešenje



Znamo iz definicije sabiranja vektora da je  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ . Prema tome je  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA}$ . Kako je vektor  $\overrightarrow{CA}$  suprotan vektoru  $\overrightarrow{AC}$ , to je  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$ . Dakle,  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$ .

2. Neka je dat paralelogram  $ABCD$ . Pokazati da je  $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$  i  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{CB}$ .

3. Neka je dat pravilan šestougao  $ABCDEF$ . Pokazati:  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} = \vec{0}$  i  $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{FA} = \vec{0}$ . (Uputstvo: koristiti Zadatak 1)